

INSTITUT MBACKÉ MATHS

COURS PRIVÉS EN LIGNE INTERNATIONAL

(+221) 70 713 09 21

TD BARYCENTRE ET PRODUIT SCALAIRE– 1S1

CORRECTION DISPONIBLE DANS NOS COURS EN LIGNE

PROF : MBACKE MATHS **ANNEE 2023-2024** ***Niveau :*** **1S1**

Série d'exercices

❖ **Exercice 1 :**

1. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles le système de points pondérés $\{(A,\sqrt{x^2-3x+4});(B,3x-x^2);(C,-2)\}$ n'admet pas de barycentre.
2. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles le système de points pondérés $\{(A,E(x));(B,-x)\}$ admet un barycentre.

❖ **Exercice 2:**

Soit ABC un triangle.

1. Construire le barycentre G des points $(A,3)$ et $(B,3)$.
2. Construire le barycentre E des points $(B,3)$ et $(C,1)$.
3. Construire le barycentre F des points $(C,1)$ et $(A,3)$.
4. On appelle I le barycentre des points $(A,3)$, $(B,3)$ et $(C,1)$.

a. Démontrer que les points A, I et E sont alignés.

b. Démontrer que les droites (AE), (CG) et (BF) sont concourantes.

❖ **Exercice 3:**

1. Soit ABC un triangle, A' le barycentre des points $(B,-1)$ et $(C,2)$; B' le barycentre des points $(A,3)$ et $(C,2)$; C' le barycentre des points $(A,3)$ et $(B,-1)$.

Démontrer que les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes.

2. Soit EFG un triangle et trois points M, N et P tels que : $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MG}, \overrightarrow{NE} = 2\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG} = 4\overrightarrow{EP}$.

Démontrer que les droites $(EM), (GN)$ et (FP) sont concourantes.

❖ **Exercice 4:**

Soit ABC un triangle, B' et C' les milieux respectifs des côtés $[AC]$ et $[AB]$. On désigne par D le symétrique de A par rapport à B, E le symétrique de C par rapport à A et F le milieu de $[DE]$.

Démontrer que les points F, B' et C' sont alignés. Préciser leurs positions relatives.

❖ **Exercice 5:**

Soit a un réel différent de -1. Soit E le barycentre des points $(A, 1)$ et (B, a); F le barycentre des points $(A, 1)$ et (C, a). Démontrer que les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

❖ **Exercice 6:**

$ABCD$ est un carré de centre O, de côté α. G est le centre de gravité du triangle ABC.

1. Montrer que le barycentre H du système $\{(A, 1); (B, 1); (C, 1); (D, 5)\}$ est le milieu du segment $[OD]$.

2. Calculer, en fonction de α, la distance OD.

3. Déterminer et construire l'ensemble E des points M du plan vérifiant :

$\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 5\overrightarrow{MD} \| = 2\alpha\sqrt{2}$

4. Sans nouvelle démonstration, donner la position du barycentre K du système $\{(A, 1); (B, 5); (C, 1); (D, 1)\}$.

5. Déterminer et construire l'ensemble F des points M du plan vérifiant :

$\| \overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \| = \| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 5\overrightarrow{MD} \|$

❖ **Exercice 7:**

Soit ABC un triangle et M un point strictement intérieur à ce triangle. Les droites $(AM), (BM)$ et (CM) coupent respectivement les côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$ du triangle en A', B' et C'.

1. a. Démontrer que : $\frac{\text{aire}(MAB)}{\text{aire}(MAC)} = \frac{A'B}{A'C}$.

b. En déduire que A' est le barycentre des points pondérés $(B$, aire $(MAC))$ et $(C$, aire $(MAB))$

2. Soit G le barycentre des points pondérés $(A$, aire $(MBC)), (B$, aire $(MAC))$ et $(C$, aire $(MAB))$.

Démontrer que que les points G et M sont confondus.

Application

Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. On pose $BC = a, CA = b$ et $AB = c$. En utilisant les résultats précédents démontrer que I est le barycentre des points $(A; a), (B; b)$ et $(C; c)$.

❖ Exercice 8:

Soit ABC un triangle quelconque tel que $AB = 5, AC = 4$ et $BC = 6$.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$. En déduire les valeurs exactes de $\cos \hat{A}, \cos \hat{B}$ et $\cos \hat{C}$.

❖ Exercice 9:

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $AB = 5$ et $BC = 6$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2. Construire le point $G = \text{bar}\{(A; 2), (B; 3), (C; 3)\}$.

3. Soit f l'application définie pour tout point M du plan par : $f(M) = 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$

a. Démontrer que $f(M) = f(G) + 4MG^2$.

b. Calculer $f(A)$ et $f(G)$.

c. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = f(A)$.

❖ **Exercice 10:**

$ABCD$ est un carré de coté a et E un point quelconque de $[BC]$. On considère le point F de $[CD]$ tel que $BE = CF$.

1. On pose $BE = x$. Exprimer en fonction de a et x les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BC}$.
2. Démontrer que les droites (BE) et (CF) sont perpendiculaires.

❖ **Exercice 11:**

Soit ABC un triangle rectangle en A avec $AB = a$ et $AC = 2a$. I désigne le milieu de $[AC]$ et G est le barycentre du système $\{(A;3);(B,-2);(C;1)\}$.

1. Construire le point G et préciser la nature du quadilatère $ABIG$.
2. Exprimer en fonction de a les distances GA, GB et GC.
3. A tout point M du plan, on associe le nombre réel
$$f(M) = 3MA^2 - 2MB^2 + MC^2.$$

   a. Exprimer $f(G)$ en fonction de a.

   b. Montrer que $f(M) = 2MG^2 + f(G)$.

   c. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $f(M) = 2a^2$.

❖ **Exercice 12:**

Soient trois points A, B et C du plan tels que $AB = 3a; AC = 4a$ et $BC = 5a$ où $a \in \mathbb{N}^*$.

On désigne par I le milieu du segment $[BC]$.

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
2. Soit m un paramètre réel et $G_m = \mathrm{bar}\{(A, 1-2m);(B, m);(C, m)\}$.

a. Justifier l'existence de G_m.

b. Démontrer que G_m appartient à la médiane issue de A du triangle ABC.

3. Soit $m \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

a. Montrer que : $(1-2m)G_mA^2 + mG_mB^2 + mG_mC^2 = 25a^2m(1-m)$.

b. En déduire l'ensemble (E_m) des points M du plan tels que :

$(1-2m)MA^2 + mMB^2 + mMC^2 = 25a^2m$.

c. Construire (E_1).

❖ **Exercice 13:**

Soit ABC un triangle tel que : $AB = 8 \text{ cm}, AC = 5 \text{ cm}$ et $BC = 6 \text{ cm}$. Soit I milieu de $[AB]$.

1. Construire l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 82$.
2. Choisir k pour que la ligne de niveau $\mathcal{L}_k$ de la fonction $f: M \longmapsto MA^2 + MB^2$ passe par C.
3. Construire l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M du plan tels que :
$$61 \leq MA^2 + MB^2 \leq 82.$$
4. On note $\mathcal{G}_k$ l'ensemble des points M tels que : $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = k$, où k est un nombre réel donné.

a. Quelle est la nature de $\mathcal{G}_k$.

b. Choisir k pour que $\mathcal{G}_k$ passe par B, et construire $\mathcal{G}_k$ dans ce cas particulier.

❖ **Exercice 14:**

ABC est un triangle. On pose : $BC = a,\ AC = b, AB = c,\quad \alpha = a\cos\hat{B}\cos\hat{C}$,

$\beta = b\cos\hat{A}\cos\hat{C}$ et $\gamma = c\cos\hat{A}\cos\hat{B}$. On admettra que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

1. Soit H le barycentre des points $(A,\alpha), (B,\beta)$ et (C,γ).
   a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AH}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

   b. En déduire que $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.

   c. Démontrer que H est l'orthocentre de triangle ABC.

2. Soit G le centre de gravité du triangle ABC, O le centre du cercle circonscrit et H le point tel que : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

   a. Vérifier que $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.

   b. Démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

3. Démontrer que O est le barycentre de $\{(G,3);(H,-1)\}$.

4. On reprend dans cette question les données et les résultats établis dans la question $\mathbf{1}$.

a. Vérifier que $\beta + \gamma = a\cos\hat{A}$.

b. Déduire que O est le barycentre de $(A, a\cos\hat{A}), (B, b\cos\hat{B})$ et $(C, c\cos\hat{C})$.

- **Exercice 15:**

$ABCD$ est un carré. I, J, K, L sont les milieux respectifs des côtés $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$ du carré. Les droites (AJ) et (DI) se coupent en P, les droites (AJ) et (KB) se coupent en Q, les droites (CL) et (DI) se coupent en S, les droites (CL) et (KB) se coupent en R.

1. a. Exprimer $\overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis $\overrightarrow{DI}$ en fonction de $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DB}$.

   b. En déduire que : $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{DI} = 0$.

2. a. Etablir que $\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{AL} \cdot \overrightarrow{AD}$.

   b. En déduire l'expression de PS en fonction du côté du carré $ABCD$.

3. Montrer que le quadrilatère $PQRS$ est un carré et exprimer son aire en fonction de celle du carré $ABCD$.

- **Exercice 16:**

$\mathcal{C}$ est un cercle, de centre O et de rayon R.
M est un point du plan. Une droite passant par M coupe $\mathcal{C}$ en deux points P et Q.

1. Démontrer que l'on a : $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = OM^2 - R^2$.

(on pourra faire intervenir le point P' diamétralement opposé à P.)

Le produit scalaire $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ}$ est indépendant de la sécante choisie, il ne dṕend que des points M, O, et du réel R; on l'appelle puissance du point M par rapport au cercle $\mathcal{C}$ et on ici ce réel : $p(M, \mathcal{C})$.

2. Étudier le signe de $p(M, \mathcal{C})$ suivant la position de M par rapport au cercle $\mathcal{C}$.

3. $\mathcal{C}'$ est un cercle, de rayon R' et de centre le point O' distinct de O.

a. Déterminer l'ensemble Δ des points du plan ayant la même puissance par rapport à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

b. Tracer Δ lorsque $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont sécants.

- **Exercice 17:**

A, B et C sont trois points non alignés du plan; dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant l'égalité proposée :

a. $(2\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
b. $(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.
c. $MA^2 - MB^2 = 2AB^2$.
d. $MA^2 - MB^2 = AB^2$.
e. $MA^2 + MB^2 = \frac{1}{2}AB^2$.
f. $MA^2 + MB^2 = \frac{1}{4}AB^2$
g. $MA^2 + MB^2 = 3AB^2$.
h. $2MA^2 + 3MB^2 = \frac{7}{5}AB^2$.
i. $MA^2 + 2MB^2 = \frac{1}{2}AB^2$.
j. $MA = 2MB$.

- **Exercice 18:**

$ABCD$ est un carré et k un réel. Soit I et J les points définis par :

$\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ} = k\overrightarrow{BC}$. Démontrer que $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{DI}$ sont orthogonaux.

- **Exercice 19:**

Soit A et B deux points. Montrer que le réel $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BM}$ est indépendant du point M.

- **Exercice 20:**

Soit A, B et C trois points.

1. Démontrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
2. En prenant pour point M l'intersection de deux hauteurs, déduire de la relation précédente que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

❖ **Exercice 21:**

On considère les points $A(-2;3), B(2;-1)$ et $I(1;2)$. Déterminer les coordonnées d'un point C tel que I soit le centre du cercle circonscrit au triangle ABC isocèle en C. (Donner toutes les solutions)

❖ **Exercice 22:**

Soit $A(-1;3), B(1;4)$ et $C(3;-2)$.

1. a. Déterminer une équation de la hauteur issue de A du triangle ABC.

   b. Trouver les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC.
2. a. Déterminer une équation de la médiatrice de $[BC]$.

   b. Trouver les coordonnées de O, centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
3. Trouver les coordonnées de G, centre de gravité triangle ABC.
4. Vérifier que les points O, H et G sont alignés. Situer G par rapport à O et H.
5. Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle ABC.

❖ **Exercice 23:**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère les ensembles $(\mathcal{E}_1)$ d'équation $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$, $(\mathcal{E}_2)$ d'équation $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$ et $(\mathcal{E}_3)$ d'équation $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 9 = 0$. Ces ensembles sont-ils des cercles ? Si oui, déterminer leur centre et leur rayon.

❖ **Exercice 24:**

On désigne par $(\mathcal{C}_m)$ l'ensemble des points $M(x;y)$ vérifiant $x^2 + y^2 - 4mx + 2my + 5m^2 - 1 = 0$ avec $m \in \mathbb{R}$

1. Montrer que, pour toute valeur de $m, (\mathcal{C}_m)$ est un cercle dont on précisera son centre I_m.

2. Lorsque m décrit $\mathbb{R}$, déterminer alors le lieu géométrique de I_m.

❖ **Exercice 25:**

On désigne par $(\mathcal{C}_m)$ l'ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant :

$$x^2 + y^2 + 2x + 2(1-m)y - 4 = 0 \text{ avec } m \in \mathbb{R}$$

1. Montrer que, pour toute valeur de $m, (\mathcal{C}_m)$ est un cercle.

2. Déterminer les points d'intersection des cercles $(\mathcal{C}_0)$ et $(\mathcal{C}_1)$.

3. Montrer que tous les cercles de la famille passent par deux points fixes A et B.

4. En déduire que leurs centres sont alignés.

❖ **Exercice 26:**

Montrer que les droites D_λ d'équation cartésienne :
$D_\lambda: (1-\lambda^2)x + 2\lambda y = 4\lambda + 2$, où λ désigne un paramètre réel, sont toutes tangentes à un cercle fixe à préciser.

INSTITUT MBACKE MATHS



INSTITUT MBACKÉ MATHS
Cours privées en ligne International en MATHS, PC, SVT

Cours privés en ligne international

(Année 2023-2024)

Niveau

Terminale S2 / S1
Première S2 / S1
Seconde S
Troisième

Série

Terminal D
Terminal C
Première D
Première C



Inscrivez-vous maintenant au +221 70 713 09 21





Mbacké Maths
Visitez notre chaine Youtube

 +221 70 713 09 21  mbackes883@gmail.com  Dakar, Sénégal